Dérivation

Dédou

Février 2012

Le type de la dérivation

On dérive une fonction en un point et ça donne un nombre mais ça ne marche pas toujours. La dérivée de f en a est notée $f'(a)$.

Tout ceci est condensé dans

la "carte de visite" de la dérivation

$$\begin{array}{rccl} Der : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_\perp \\ & (f, a) & \mapsto & f'(a). \end{array}$$

La fonction qu'on dérive n'est pas forcément partout définie, d'où le premier $\perp$, et sa dérivée encore moins, d'où le second.

Dériver une fonction

La dérivation qu'on vient d'évoquer concerne les fonctions. On ne peut pas écrire par exemple :

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

parce que $x^2 + 1$ est un nombre, et pas une fonction. Il faut écrire

$$(x \mapsto x^2 + 1)' = x \mapsto 2x$$

ce qui est un peu énervant. Ou alors, comme on a fait en Terminale, on "pose" $f(x) = x^2 + 1$ et on constate qu'on a $f'(x) = 2x$ (dans cette présentation, il faut préciser "pour tout réel x", ce qui est aussi un peu énervant).

Exemple

La dérivée de $x \mapsto x^2 + \sin x$ est $x \mapsto 2x + \cos x$.

Exo 1

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x \sin x$.



La notation de Leibniz

A la rigueur, on peut dériver un nombre (comme $x^2 + 1$), mais alors il faut préciser la variable par rapport à laquelle on dérive (ici x). C'est ce que permet la notation de Leibniz, avec laquelle on peut écrire

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x.$$

Cette notation, qu'affectionnent les physiciens, est dangereuse et nous l'éviterons soigneusement.

Exo 2

Donner la dérivée de $x \mapsto 2x^3$ en utilisant la notation de Liebniz.

Fonctions dérivables

Certaines fonctions sont dérivables

et d'autres pas.

Par exemple

la fonction valeur absolue n'est pas dérivable.

Plus précisément, elle n'est pas dérivable *partout*, mais elle est quand même dérivable sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire partout sauf en 0.

Donc nous dirons/écrirons des phrases de la forme

$$f \text{ est dérivable sur } I$$

avec f fonction et I partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle).



La valeur de la dérivée

La dérivée, c'est la pente de la tangente, et

la tangente, c'est "la limite des sécantes".

C'est important de comprendre ça pour avoir une bonne intuition de ce qui se passe, mais on n'utilise presque jamais cette définition. On se débrouille presque toujours avec les formules magiques, parce qu'il y en a une pour chacune de nos recettes de fonctions.

Dans la suite

on va revoir ces formules pour le calcul des dérivées.

Dériver une somme, en gros

Pour dériver une somme, c'est pas trop compliqué :

Le slogan, c'est :

La dérivée d'une somme c'est la somme des dérivées.

Et la formule, c'est :

$$(f+g)' = f' + g'.$$

La formule, c'est comme le slogan,

il faut savoir formuler l'énoncé qu'elle condense.

On va voir ça.



Dériver une somme, en détail

La version globale

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur une partie I de $\mathbb{R}$,

alors $f+g$ est aussi dérivable sur I et, sur I, sa dérivée est la somme de celle de f et de celle de g.

La variante ponctuelle :

Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ et dérivables en un point a de I.

alors $f+g$ est aussi dérivable en a et sa dérivée y est la somme de celle de f et de celle de g.

Pour cette variante ponctuelle, la formule est plutôt

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Lequel des deux énoncés est le plus fort ?



Dériver une combinaison linéaire

Comme on aime bien l'algèbre, on traîte les combinaisons linéaires :

La dérivée d'une combinaison linéaire c'est la combinaison linéaire des dérivées.

Et la formule, c'est

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Et dans la version précise, ça donne par exemple :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur une partie i de $\mathbb{R}$, et λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est aussi dérivable sur I et sa dérivée est $\lambda f' + \mu g'$.

Exo 3

Donneer la variante et la formule ponctuelles.



On le redit avec des mots savants

Linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}$

- Les fonctions sur $\mathbb{R}$ constituent un espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ avec les opérations qu'on sait.
- Les fonctions dérivables constituent un sous-espace vectoriel $D(\mathbb{R})$ de cet espace vectoriel.
- Et la dérivation $D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est une application linéaire.

Exo 4

Démontrer l'énoncé précédent.

Exo 5

Donner une variante ponctuelle de la linéarité de la dérivation.



On le redit avec des mots savants : exo

Exo 6

Formuler la linéarité de la dérivation pour les fonctions sur un intervalle.

Dériver un produit

Pour un produit, c'est un peu pareil, y'a que la formule qui change.

La dérivée d'un produit, ce n'est pas le produit des dérivées.

La formule, c'est

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Exo 7

a) Formuler l'énoncé validant cette formule.
b) Donner la variante ponctuelle de cette formule et l'énoncé correspondant.

Dériver un quotient

La formule pour la dérivée d'un quotient, c'est

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Et il faut faire attention au domaine de définition puisqu'on divise.

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur une partie I de $\mathbb{R}$, et si g ne s'annule pas sur I ,

alors $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et, sur I, sa dérivée est donnée par la formule ci-dessus.

Exo 8

Donner la variante ponctuelle pour la formule et pour l'énoncé.

La composition des fonctions

La composition

c'est l'opération compliquée concernant les fonctions.

Quand on écrit $f(g(x))$, ça cache une fonction composée. Comme on ne peut pas dire que cette fonction, c'est $f(g)$, on dit que c'est $f \circ g$.

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos e^x$ est de la forme $f \circ g$ avec $f := \cos$ et $g := x \mapsto e^x$.

Exo 9

Mettre la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$ sous la forme $f \circ g$.



Dériver une composée, en gros

La formule pour la dérivée de $f \circ g$, c'est

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Elle est un peu horrible.

La variante ponctuelle est peut-être plus digeste, du moins en mode Leibniz

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = g'(x).f'(g(x)).$$

On va apprendre à s'en servir. Mais d'abord on valide par des énoncés.

Dériver une composée, le cas facile

La formule :

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Plus encore que celles pour la somme et le produit, cette formule a un mode d'emploi subtil. Pour les fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$, c'est facile.

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

alors $f \circ g$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par la formule ci-dessus.

Dériver une composée, le cas sérieux

La formule :

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Dans le cas général ça se complique un peu, il faut deux intervalles.

Si, sur l'intervalle I, g est dérivable et prend ses valeurs dans l'intervalle J, si de plus f est dérivable sur J,

alors $f \circ g$ est dérivable sur I, et sa dérivée y est donnée par la formule.

Exo 10

Donner la variante ponctuelle pour cet énoncé.

Dériver une composée, les cas qui servent

La formule :

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Les cas qui servent sont ceux où f est l'une de nos "cinq" fonctions favorites.

Ca donne les cinq formules magiques :

$$(\cos g)' = -g' \sin g \qquad (\sin g)' = g' \cos g$$

$$(e^g)' = g' e^g \qquad (\ln g)' = \frac{g'}{g}$$

$$(g^a)' = a g' g^{a-1}.$$

Les formules magiques avec u au lieu de g

Les mêmes avec u au lieu de g :

$$(\cos u)' = -u' \sin u \qquad (\sin u)' = u' \cos u$$

$$(e^u)' = u' e^u \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^a)' = a u' u^{a-1}.$$

Attention, il y a u' partout, et on a tendance à l'oublier un peu trop souvent.

Exemple

Exemple

La fonction $f := x \mapsto \sin(e^x + 1)$ est de la forme $\sin u$ avec $u := x \mapsto e^x + 1$. On a donc $u' = x \mapsto e^x$ et $f' = x \mapsto e^x \cos(e^x + 1)$.

Exo 11

Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{\sin x + 1}$.